Věta 1. *Nechť* $r, R \in [0, \infty]$ *a* $f \in H(U(a, r, R))$, *potom platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n, \quad z \in U(z, r, R),$$

kde $\gamma_r(t) = z + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r < \rho < R$.

Využití Laurentových řad k výpočtu Fourierových řad: nechť $0 < \varepsilon < 1$ a $f \in H(U(0, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$ s Laurentovou řadou $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Potom pro ($2\pi$-periodickou) funkci $\varphi : t \mapsto f(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \right) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \varphi, \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Komplexní logaritmus a obecná mocnina

Věta 2 (o inverzní funkci k holomorfní funkc)**.** *Nechť* $f \in H(U(z, r))$ *a* $f'(z) \neq 0$. *Potom je na okolí* z *funkce* f *prostá a* f^{-i} *je holomorfní na okolí* $w = f(z)$. *Navíc platí (známý vzoreček)* $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$.

Pro $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (nebo i $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) můžeme definovat

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Dostaneme tak inverzní funkci k funkci $e^z|_U$, kde $U = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (-\pi, \pi)\}$ (resp. pro $\{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (-\pi, \pi]\}$). Této funkci se říká hlavní hodnota logaritmu.

Obecnou mocninu pak definujeme (stejně jako v $\mathbb{R}$) předpisem $z^a = e^{a \log(z)}$.

Logarirmuse ale můžeme definovat i jaka promitivní funkci k $\frac{1}{z}$. Použijeme následující obecnější verzi Cauchyho věty: Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast. Potom pro každou zavřenou C^1 křivku γ splňující $\langle\gamma\rangle \subset \Omega$ a funkci $f \in H(\Omega)$ platí

$$\int_\gamma f = 0.$$

Potom pro každou $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jednoduše souvislou oblast splňující $1 \in \Omega$ existje funkce $\log_\Omega :\in H(\Omega)$

1. $e^{\log_\Omega z} = z$, $z \in \Omega$,
2. existuje $\delta > 0$, že $\log_\Omega = \log$ na $(1-\delta, 1+\delta) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Klasifikace singularit

Definice 3 (Singularity holomorfních funkcí). *Říkáme, že funkce f má v bodě a*

- ***izolovanou singularitu**, pokud existuje $r > 0$, že $f \in H(U(a,0,r))$ (a tedy má na $U(a,0,r)$ Laurentovu řadu $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$)*
- ***odstranitelnou singularitu**, pokud má v a izolovanou singularitu a S má nulovou hlavní část,*
- ***pól**, pokud má v a izolovanou singularitu a hlavní část S má jen konečně nenulových členů, nejvyšší $n \in \mathbb{N}$ splňující $c_{-n} \neq 0$ nazýváme jeho **násobností***
- ***podstatnou singulartnu**, pokud má v a izolovanou singularitu a hlavní část S má nekokonečně nenulových členů.*